はしがき

連続変数に関する最適化においては，凸解析 — 凸関数の理論 — がその理論的な核となっている．一方，離散変数に関する最適化 (組合せ最適化) にはこのような統一的枠組みはないが，マトロイドと呼ばれる構造が良い性質と認知されている．本書で解説する「離散凸解析」は，凸解析とマトロイド理論の両方の視点から最適化の世界を眺めようとする試みである．標語的には「離散凸解析 = マトロイド理論 + 凸解析」であり，組合せ論的な性質を兼ね備えた凸性という構造を考察するのが「離散凸解析」の主題である．

組合せ最適化の分野においては，60 年代の終わりから劣モジュラ性 (≃ マトロイド性) と凸性との類似が漠然とした形で議論されていたが，80 年代はじめになるとその関係が明確になり，「マトロイドの双対性 = 凸解析における双対性 + 離散性」という図式が広く受け入れられた．90 年代にはいってから，付値マトロイドの概念が導入され，その双対定理が示された．「離散凸解析」は，これを契機として発展したものであり，80 年代の「劣モジュラ関数 vs. 凸関数」に関する成果を包含する理論となっている．

「離散凸解析」では，通常の凸性に加えて互いに共役な 2 種類の組合せ構造を区別し，それらを M 凸性，L 凸性と呼ぶ．すなわち，「離散凸解析」では M 凸関数と L 凸関数が組合せ構造をもつ凸関数として考察される．

組合せ論的な性質を兼ね備えた凸性という構造は，マトロイドという抽象的な枠組み以前に，いろいろな形で実在している．その一例は非線形抵抗からなる電気回路であり，M 凸性と L 凸性の共役関係は，電流 (フロー) と電位 (ポテンシャル) の関係にあたる．また，Poisson 微分方程式などで記述されるポテンシャル問題においては，微分作用素と Green 関数の関係がこの共役関係に対応している．数理経済学においては財と価格の関係である．

「離散凸解析」の構築および本書の執筆にあたって，多くの方々のご支援を得

た．とくに，藤重悟氏は，当初から離散凸解析の意義を認めてくださり，さらに，多面体的な見方の重要性を指摘してくださった．岩田覚氏は，離散凸解析の初期段階のほとんどすべての原稿を読んで多くの有用な注意をしてくださった．また，同氏には，未発表の結果を本書に紹介することを快諾していただいた．塩浦昭義氏には，1996 年以降，共同研究者として数限りない討論につき合っていただくとともに，本書に関する詳細なコメントをいただいた．M/L 凸関数の多面体的凸関数への一般化については同氏に負うところが大きい．田村明久氏，高畑貴志氏には，原稿を精読していただき貴重なコメントをいただいた．杉原正顯氏には，原稿に関する建設的な意見と有用な注意をいただいた．また，梶井厚志氏，金子守氏，高橋陽一郎氏，松本眞氏，宮岡洋一氏，楊再福氏，和光純氏には，文献や専門用語等のご教示をいただいた．この場を借りて，ご支援いただいた皆様に感謝の意を表したい．

本書は「離散凸解析」を体系的に解説した初の成書である．数学的な結果を述べるだけでなく，なぜそのようなことを考えたいのかをできるだけ丁寧に述べたつもりである．「離散凸解析」の諸定理に託した著者のメッセージは，横断的な視点の面白さである．応用の数理を志す若い人々に何かの参考になれば幸いである．

2001 年 7 月

室 田 一 雄